

基于比较模型的扩展立方体网络的 (t, k) -诊断度研究

梁家荣, 陈秒江

(广西大学计算机与电子信息学院, 广西 南宁 530004)

摘 要: 针对扩展立方体网络故障诊断问题, 提出一种基于比较模型的 (t, k) -故障诊断方法。首先, 通过图论的方法研究 n 维扩展立方体网络(AQ_n)的重要性质, 根据这些性质设计了一个基于比较模型的算法来寻找该扩展立方体网络的最大非故障组件。然后, 利用所得的最大非故障组件来确定该网络系统的 (t, k) -故障诊断度。最后, 提出并证明了 n 维扩展立方体网络是 $(t, 2n-1)$ -可诊断的。结果表明, n 维扩展立方体网络的 $(t, 2n-1)$ -诊断度 $\frac{2^{n-1}(2n-2)\text{lb}(2n-3)}{(2n-3)^2}$ 远大于其条件诊断度 $(6n-17)$ 及传统故障诊断度 $(2n-1)$ 。

关键词: 扩展立方体网络; (t, k) -诊断度; 比较模型; PMC 模型; 故障组件

中图分类号: TP393

文献标识码: A

Research on (t, k) -diagnosability for augmented cube network under the comparison model

LIANG Jia-rong, CHEN Miao-jiang

(School of Computer and Electronic Information, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: Aiming at the problem of fault diagnosis in the augmented cube network, a (t, k) -fault diagnosis method based on the comparison model was proposed. The important properties of the n -dimensional augmented cube network (AQ_n) by the method of graph theory were sketched. Then algorithm based on the comparison model to locate the largest fault component in the network was presented. Furthermore, the (t, k) -diagnosability of the augmented cube network was calculated by using the largest fault component obtained. Finally, it is proved that the n -dimensional augmented cube network (AQ_n) is $(t, 2n-1)$ -diagnosable. The result shows that the $(t, 2n-1)$ -diagnosability of AQ_n is $\frac{2^{n-1}(2n-2)\text{lb}(2n-3)}{(2n-3)^2}$, which is much larger than $6n-17$, the conditional diagnosability of AQ_n . And the latter is still larger than $2n-1$, the ordinary diagnosability of AQ_n .

Key words: augmented cube network, (t, k) -diagnosability, comparison model, PMC model, fault component

1 引言

随着超大规模集成技术(VLSI)的飞速发展, 多处理器系统包含了数百甚至数千个处理器, 多处理器系统通过节点间的互连实现信息的交换通信。由于处理器规模的不断增大以及处理器之间信息的频繁交换, 多处理器系统中的处理器产生故障是

不可避免的。为了确保网络系统在通信过程中的可靠性, 系统应具备良好的故障与非故障处理器识别的能力。在一个多处理器网络系统中, 识别故障处理器与非故障处理器的过程称为故障诊断。在网络系统的故障诊断中, 主要有 2 种方式, 一种是电路级诊断, 一种是系统级诊断^[1]。电路级诊断中, 处理器必须在实验环境中一一进行检测, 这样会使诊

收稿日期: 2016-10-05; 修回日期: 2017-06-06

通信作者: 梁家荣, 13977106752@163.com

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No.61363002); 广西自然科学基金资助项目(No.2016GXNSFAA380134)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China(No.61363002), The Natural Science Foundation of Guangxi Zhuang Autonomous Region of China(No.2016GXNSFAA380134)

断变得异常复杂而不实用；而系统级诊断则能够由系统自动执行。系统级诊断的基本思想是充分利用系统中每一个处理器的处理能力，使处理器进行相互测试，通过对测试结果的综合分析识别出故障节点。在系统级故障诊断的研究中，Preparata 等^[2]首先提出了第一个故障诊断模型——PMC 故障模型。在 PMC 故障模型中，一个无向图 $G=(V,E)$ 可以用来代表一个多处理器网络系统，其中， V 是处理器集合， E 代表处理器之间的测试连接（通信）。 $(u,v) \in E$ 意味着 u 与 v 可以相互检测。如果 u 测试 v （此时， u 被称为测试者， v 被称为被测试者），那么 u 向 v 发送一个测试任务，节点 v 响应一个反馈信息。若响应错误，则测试结果为 1，记为 $\sigma(u,v)=1$ 。相反，如果响应正确，则测试结果为 0，记为 $\sigma(u,v)=0$ 。如果测试处理器本身就是故障的，那么其测试结果是不可靠的。在 PMC 模型下网络系统的故障诊断问题如诊断算法、诊断度、强诊断度以及悲观诊断度等已得到了广泛研究^[3-8]。

1976 年，Barsi 等^[9]对 PMC 模型进行了改进，提出了 BGM 模型。与 PMC 模型相比，BGM 模型的条件更为严格一些。BGM 故障模型认为，当节点 u 测试节点 v 时，如果节点 v 是故障的，那么测试结果总为 1。换句话说，无论测试者 u 是否故障，都有 $\sigma(u,v)=1$ 。此外，文献[10]提出了另一个有别于 PMC 模型和 BGM 模型的故障诊断模型，即比较诊断模型，简称比较模型。比较模型认为，对于用图 $G=(V,E)$ 表示的网络系统，为了诊断处理器 u 和 v 的状态，可以通过一个称为比较处理器的节点 w 给 u 和 v 发出相同的任务，然后根据它们的反馈信息来确定比较结果。如果返回相同的响应，则比较结果为 $\sigma(w:u,v)=0$ ；反之，如果返回的响应不相同，则比较结果为 $\sigma(w:u,v)=1$ 。比较诊断模型是比 PMC 模型应用更为广泛的故障诊断模型，因为对每个比较结果 $\sigma(w:u,v)$ ，当 $w=u$ 或 $w=v$ 时，比较模型就直接变成了 PMC 模型^[11]。对比较模型下的网络故障诊断问题的研究已取得了不少的研究成果^[12-16]。

在众多的多处理器网络系统的拓扑结构中，规则互联网络结构无疑是极为重要的一种。而规则网络中，超立方体网络（用 Q_n 表示 n 维超立方体网络）自然是最有代表性的一种网络拓扑^[17]，究其原因，一是超立方体网络具有良好的递归性、正则性、对

称性、哈密尔顿性、路由算法简单、容错性强等诸多优点；二是超立方体网络在商业、民用领域已得到广泛应用，如在 Intel iPSC/1、iPSC/2 和 nCUBE 机等系统中都采用了超立方体网络结构，甚至有可能成为未来纳米计算机网络的基本结构^[18]。然而，超立方体网络直径会随着维数增加呈线性增加，且网络的连接复杂度也随着网络规模的增加而快速增长，可扩展性比较差。为此，人们提出了众多的以超立方体网络为基础的变体结构，如 Möbius 立方体、交叉立方体、扭立方体、局部扭立方体、交换超立方体、扩展立方体网络结构等。在这些超立方体网络的变种中，扩展立方体网络（用 AQ_n 表示 n 维扩展超立方体网络）不但具有超立方体网络的良好性能，而且具有优于 Q_n 的优点，如其网络直径 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ 仅是 Q_n 的一半，又如其独有的良好网络嵌入特性也是 Q_n 及其他变种网络所不具备的^[19]。

考虑到扩展立方体网络的优良特性，对其开展故障诊断分析，构建其故障诊断理论，无疑对扩展立方体网络的应用及其可靠性分析具有重要的意义。在扩展立方体网络的故障诊断中，文献[20]研究了 PMC 模型下扩展立方体网络的条件诊断度，文献[21]基于比较模型对扩展立方体网络的强诊断度和条件诊断度 2 个方面展开了详细的讨论。值得一提的是，上述文献的研究都是从 t -可诊断的角度出发的，事实上，在系统级故障诊断中有 2 种常见策略： t -可诊断和 (t,k) -可诊断。文献[2]第一次提出了 t -可诊断的概念。 t -可诊断是指在故障节点不超过 t 个的前提下，所有的故障节点均可一次性被识别出来，但 t -可诊断度往往较低，且条件要求过高。文献[22]提出了 (t,k) -可诊断的概念， (t,k) -可诊断指的是在系统故障节点不超过 t 个的前提下，通过迭代每次至少能识别 k 个故障节点，在下次迭代之前对已识别的故障节点进行修复或更换。关于互联网络的 (t,k) -可诊断研究，文献[23]证明了超立方体网络是 $\left(\frac{2^{n-1}(n-2)\lg n}{n^2}, n \right)$ -可诊断的，文献[24]证明了交换超立方体网络在 PMC 模型下是 $\left(2^{\frac{s+p-1}{3}}, s+1 \right)$ -可诊断的。

本文拟研究在比较故障模型下扩展立方体网络的 (t,k) -故障诊断度。本文的主要贡献在于：1) 首次给出了基于比较故障模式的扩展立方体网络最大的非故障组件的算法；2) 明确了扩展立方体网络的

(t, k)-故障诊断度。本文的成果对实际应用中的扩展立方体网络的故障检测具有重要的理论指导价值。

2 预备知识

一个多处理器网络系统可以用一个无向图 $G=(V, E)$ 来表示, $V(G)$ 中的元素 u 表示处理器, $(u, v) \in E(G)$ 表示 u 与 v 之间的通信。如果 $V' \subseteq V, E' \subseteq E$, 则称图 $G'=(V', E')$ 为 G 的子图。设 $v \in V(G)$, 用 $N(v) = \{u | u \in V, (u, v) \in E\}$ 来表示顶点 v 的所有邻居节点组成的集合; 用 $d(v)$ 表示 v 的度数, 即与 v 关联的边的条数。 $N(V') = (\bigcup_{u \in V'} N(u)) - V'$ 表示 $V' \subseteq V$ 的所有邻居节点集。如果一个无向图 G 的每个顶点的度数相同且等于 k , 则称 G 为 k -正则图。

比较诊断模型(也称为 MM 模型)的工作原理为: 一个比较器节点 w 向与其相邻的 2 个节点 u 和 v 发送相同的任务, u 和 v 反馈相应的信息。然后根据 u 和 v 的反馈情况给出相应的比较结果(症状)。如果 u 和 v 反馈的信息一致, 那么比较结果为 0, 记为 $\sigma(w:u, v) = 0$; 如果 u 和 v 的反馈信息不一致, 那么比较结果为 1, 记为 $\sigma(w:u, v) = 1$ 。

定义 1^[10] 在比较模型下, 系统 $G=(V, E)$ 的一个症状集为

$$\sigma = \{\sigma(w:u, v) | u, v, w \in V \wedge u, v \in N(w)\}$$

在本文中, 为了与 MM 模型相一致, 进行以下假设^[10]。

- 1) 所有的故障节点都是永久性的。
- 2) 对于比较器给定的任意输入任务, 故障处理器必将响应错误的输出。
- 3) 2 个故障处理器接收相同的输入任务时, 不会产生相同的响应输出。
- 4) 当比较处理器本身为故障处理器时, 其所给出的比较结果是不可靠的。

表 1 给出了比较模型下各种可能的症状, 由表 1 可知, 当 w, u, v 都是非故障时, 必有 $\sigma(w:u, v) = 0$; 如果 $\sigma(w:u, v) = 1$, 那么 w, u, v 至少有一个是故障的。比较模型约定一个非故障的比较处理器 w 给出的比较结果是可靠的。

定义 2^[10] 设 $G=(V, E)$ 是一个网络系统诊断图, σ 为症状集。如果下面条件成立: 1) 如果 $w \in V - F, u, v \in V - F$, 那么 $\sigma(w:u, v) = 0$; 2) 如果 $w \in V - F, u \in F$ 或 $v \in F$, 那么 $\sigma(w:u, v) = 1$,

$F \subset V$ 称为 σ 的相容性故障集。

表 1 比较模型下可能的症状

比较器节点 w	被测节点 u	被测节点 v	症状 $\sigma(w:u, v)$
非故障	非故障	非故障	0
非故障	非故障	故障	1
非故障	故障	非故障	1
非故障	故障	故障	1
故障	非故障	非故障	0 或 1
故障	非故障	故障	0 或 1
故障	故障	非故障	0 或 1
故障	故障	故障	0 或 1

定义 3^[22] 对于 $t \geq k$, 一个系统 S 被称为 (t, k) -可诊断系统, 如果对于由故障集 F 产生的症状, 以下 2 个条件得到满足。

- 1) $|F| \leq k$ 时, 系统能识别所有的故障节点。
- 2) $k < |F| \leq t$ 时, 系统至少能识别 k 个故障节点。

由定义 3 可知, (t, k) -可诊断可看成一步诊断和顺序诊断的一般化: 当 $k=1$ 时, (t, k) -诊断则为顺序诊断; 当 $k=t$ 时, (t, k) -诊断就成为一步诊断。

在无向图 $G=(V, E)$ 中, E 的一个子集 $M \subseteq E$ 称为一个匹配, 如果 $G=(V, E)$ 中不存在顶点同时关联 M 中的 2 条边, 且不存在 $v \in V$ 使 $(v, v) \in M$, 假设 M 为 $G=(V, E)$ 的一个匹配, $v \in V$, 若 v 与 M 中的边相关联, 则称 v 是 M 的饱和点, 否则称 v 为 M 的非饱和点。如果图 G 中所有顶点均为 M 的饱和点, 则称 M 为完美匹配。

定义 4^[23] m -维复合组件图 CCG_m , 可以递归定义如下: 1) $CCG_1 = K_1$; 2) 正整数 $m \geq 2$, $CCG_m = \{PM(G_1, G_2, \dots, G_h) | G_i \in CCG_{m-1}\}$, 其中, $2 \leq \sum_{i=1}^h n(G_i)$
 $h \leq \frac{\sum_{i=1}^h n(G_i)}{2} + 1, |V(G_i)| \leq \sum_{1 \leq j \leq h, i \neq j} n(G_j)$, PM 是 G_1, G_2, \dots, G_h 的完美匹配, 即 $PM = \{(x, y) | x \in V(G_i), y \in V(G_j), 1 \leq i, j \leq h, i \neq j\}$ 。

为了方便起见, 本文用 $PM(G_1, G_2, \dots, G_h)$ 表示复合组件图, 用 C_n 表示包含 n 个节点的环。其中, $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) \cup \dots \cup V(G_h)$, $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \dots \cup E(G_h) \cup PM$ 。例如图 1 中, 图 1(a) 是组件图 $CCG_2 = \{K_2\}$, 图 1(b) 是组件图 $PM(C_4, C_8, C_6, C_4) \in CCG_4$, 其中, $C_4 = PM(K_2, K_2)$, $C_6 = PM(K_2, K_2, K_2)$, $C_8 = PM(K_2, K_2, K_2, K_2)$ 。

根据定义 4, 可得到关于 CCM_m 的以下性质。

引理 1^[23] 任意无向图 $G = PM(G_1, G_2, \dots, G_h) \in CCG_m$ 都具有以下性质。

- 1) 图 G 为连通图。
- 2) $n(G) \geq 2^{m-1}$ 。
- 3) 图 G 是 $(m-1)$ -正则图。
- 4) $n(G)$ 为偶数, 当 $m \geq 2$ 。
- 5) $2 \leq l \leq \frac{n(G)}{2} + 1, m \geq 2$ 。
- 6) $n(G_i) \leq \sum_{1 \leq j \leq i} n(G_j), 1 \leq i \leq h$ 。

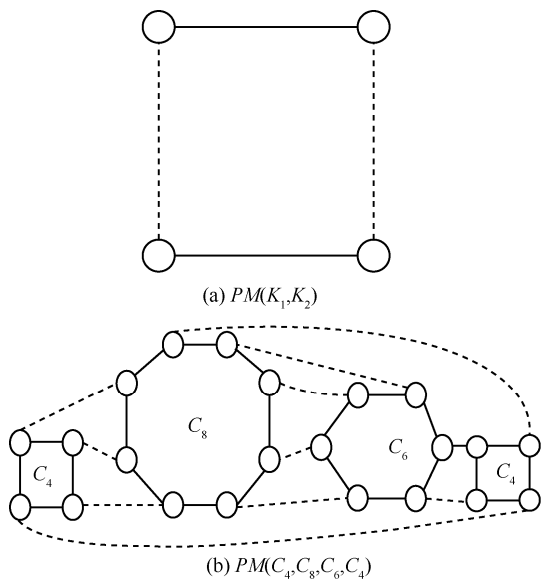


图 1 PM 组件图

3 扩展立方体网络的性质

定义 5^[19] AQ_1 是一个由分别标记为 0 和 1 的 2 个节点组成的完全图 K_2 , 当 $n \geq 2$, AQ_n 通过在 2 个 $n-1$ 维的 AQ_{n-1} (AQ_{n-1}^0 和 AQ_{n-1}^1) 之间添加 $2 \times 2^{n-1}$ 条按以下规则连接的边来生成。令 $V(AQ_{n-1}^0) = \{0a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1 \mid a_i \in \{0,1\}\}$, $V(AQ_{n-1}^1) = \{1b_{n-1}b_{n-2} \dots b_1 \mid b_i \in \{0,1\}\}$ 。节点 $u = 0a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1 \in AQ_{n-1}^0$ 与节点 $v = 1b_{n-1}b_{n-2} \dots b_1 \in AQ_{n-1}^1$ 相连, 当且仅当 $a_i = b_i, 1 \leq i \leq n-1$ 或 $a_i = \bar{b}_i, 1 \leq i \leq n-1$ 。

扩展立方体 AQ_2 和 AQ_3 如图 2 所示。由定义 5 可知, 可以把 AQ_n 这种递归的结构表示为 $AQ_n = LR$, 其中, $L \cong AQ_{n-1}^0, R \cong AQ_{n-1}^1$, 在 L 与 R 之间的边为交叉边。易知, AQ_n 的每一个节点都有 2 条交叉边。对于任意 n 位二进制节点 $u = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1$, 令

$u_i = a_n \dots \bar{a}_i \dots a_1, \bar{u}_i = a_n \dots a_i \dots \bar{a}_1$ (第 1 位到第 i 位均取反)。 AQ_n 的另一种等价定义可以表述如下。

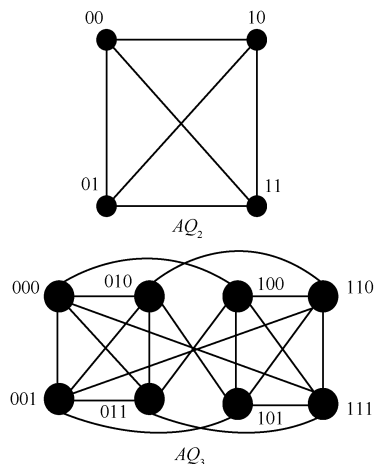


图 2 扩展立方体 AQ_2 和 AQ_3

定义 6^[21] n 维扩展立方网络 AQ_n 有 2^n 个节点, 每一个节点的地址用 n 位二进制串表示, 任意 2 个节点 $u = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1$ 和 $v = b_n b_{n-1} b_{n-2} \dots b_1$ 间有连接, 仅当以下条件成立。

- 1) 存在一个整数 $i, 1 \leq i \leq n$, 且 $v = u_i$ (在这种情形中, 边 (u, u_i) 为超立方体的连接边)。
- 2) 存在一个整数 $i, 2 \leq i \leq n$, 使 $v = \bar{u}_i$ (在这种情形中, 边 (u, \bar{u}_i) 为补码交叉边)。

引理 2^[25] 扩展立方体网络连通度为 $\kappa(AQ_1) = 1, \kappa(AQ_2) = 3, \kappa(AQ_3) = 4$, 对于 $n \geq 4, \kappa(AQ_n) = 2n - 1$ 。

由引理 2 可知, AQ_n 为 $(2n-1)$ -正则图。为此, AQ_n 可以转化为复合组件图 CCG_m 形式, 如图 3 所示。以 AQ_4 为例, AQ_4 共有 16 个节点, 假设其故障节点 (黑色) 与非故障节点 (白色)。那么图 3 对应的 AQ_4 的组件可用图 4 表示。

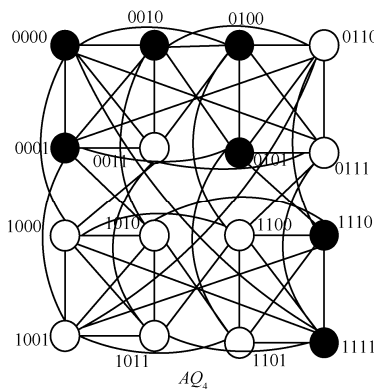


图 3 扩展立方体 AQ_4

算法 2 (t, k) -可诊断算法

输入 症状集 σ

1) 根据症状集 σ 使用深度优先搜索算法获得复合组件集合 C 。

2) 构造的组件图 $AQ_n^+ = (V^+, E^+)$ 。

3) 把满足 $X \in V^+$ 及 $|X| \geq t+1$ 的组件 X 诊断为非故障组件 (假设 $AQ_n = (V, E)$ 最多有 t 个故障节点)。

4) 把 $N(X)$ 的组件诊断为故障组件并进行修复。

5) 重复步骤 1)~步骤 4), 直到系统 $AQ_n = (V, E)$ 的所有故障节点被完全修复。

由引理 3 可知, 组件集合 C 中的组件要么全是故障的, 要么全是正常的。由组件图 $AQ_n^+ = (V^+, E^+)$ 的定义可得, V^+ 中的元素要么全是故障的, 要么全是正常的。由引理 5 可得, 步骤 3) 得到的结果是合理的、正确的, 由 (t, k) -可诊断的定义易知步骤 4)、步骤 5) 是可行的、合理的。关于时间复杂性, 对于 AQ_n 由文献[16]知步骤 1) 深度优先搜索算法获得组件集合 C 需要的时间为 $O(MbN)$, 步骤 2) 构造的组件图 $AQ_n^+ = (V^+, E^+)$ 需要的时间为 $O(1)$, 步骤 3) 和步骤 4) 时间复杂度都是 $O(1)$, 所以执行一轮修复所需要的时间为 $O(MbN) + 3O(1) = O(MbN)$ 。进而执行步骤 5) 后, 全部修复所有的故障节点需要的时间为 $O(N^2 \text{lb} N)$, 其中, $N = 2^n$ 。

4 (t, k) -诊断度

为了便于讨论扩展立方体网络的 (t, k) -诊断度, Chen 和 Hsieh^[23] 定义了以下 Φ 函数。

定义 7 对于系统 $G = (V, E)$, 定义 $\Phi(x, y)$ 为满足以下条件的最大整数 p : 对于任意满足 $y \leq |S| \leq p$ 的非空子集 $S \subseteq V$, 存在一个组件 $W \subseteq V - S$ 满足以下 2 个条件。

- 1) $|W| \geq x$ 。
- 2) $\sum_{z \in r} |Z| \geq y, \Gamma = \{Z | N(W, Z) \neq \emptyset\}$ 。

令 $x = t+1, y = k$, 如果 $\Phi(t+1, k) \geq t$, 那么在计算最大整数 $p = \Phi(t+1, k)$ 时所产生的 S, W 应满足 $W \subseteq V - S$ 且 $|W| \geq x > t$, 因而 W 为非故障组件, 进而可得到子集 S 为故障组件。

引理 6^[23] 对于系统 $G = (V, E)$ 及满足 $q < \kappa(G)$ 所有的非负整数 q , 有 $\Phi(x, \kappa(G)) = \Phi(x, q)$ 成立。

对于一个连通度为 $\kappa(G)$ 的正则网络, 由引理 6

可知, $\kappa(G)$ 可作为 (t, k) -诊断中的 k 值。为寻找 (t, k) -诊断中合适的 t 值, 先定义一个函数 $\Psi(x)$: $\Psi(x)$ 为满足如下条件的最小的整数 q , 对于任何满足 $|H| = q$ 的子集 $H \subseteq V, V - H$ 中不存在基数大于或等于 x 的组件 $W \subseteq V - H$ 。根据函数 $\Phi(x, y)$ 和 $\Psi(x)$ 的定义可知, $\Phi(x, 0) = \Psi(x) - 1$ 。

对于扩展立方体网络 $AQ_n = (V, E)$, 记 $I(\beta) = \max_{Z \subseteq V, |Z| = \beta} |\{(z_1, z_2) | z_1, z_2 \in Z \wedge (z_1, z_2) \in E\}|$ 。

引理 7 在扩展立方体网络 $AQ_n = (V, E)$ 中, $0 \leq I(\beta) \leq \beta \text{lb} \beta$ 。

证明 (归纳法) 对于 $AQ_1 = \{K_2\}$ 和 AQ_2 , 显然, $0 \leq I(\beta) \leq \beta \text{lb} \beta$ 成立。假设对于 AQ_{n-1} , 引理 7 的结论成立。对于 AQ_n , 以及任意 $\beta \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$, 根据 $I(\beta)$ 定义, 存在 $Z \subseteq V, |Z| = \beta$ 使 $I(\beta) = |\{(z_1, z_2) | z_1, z_2 \in Z \wedge (z_1, z_2) \in E\}|$ 。记 $Z^0 = Z \cap V(AQ_{n-1}^0), Z^1 = Z \cap V(AQ_{n-1}^1)$, $|Z^0| = \beta_1, |Z^1| = \beta_2$, 那么 $\beta = \beta_1 + \beta_2$ 。由归纳假设, 有 $0 \leq I(\beta_1) \leq \beta_1 \text{lb} \beta_1, 0 \leq I(\beta_2) \leq \beta_2 \text{lb} \beta_2$ 。不失一般性, 假设 $\beta_1 \leq \beta_2$ 。由 AQ_n 的定义, 易得

$$I(\beta) \leq I(\beta_1) + I(\beta_2) + 2\beta_1 \leq \beta_1 \text{lb} \beta_1 + \beta_2 \text{lb} \beta_2 + 2\beta_1 \quad (1)$$

此外, 有

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1}{2^{\beta_2}} &\leq 1 + \frac{\beta_1}{\beta_2} \Rightarrow \frac{\beta_1}{\beta_2} \leq \text{lb} \frac{\beta}{\beta_2} \\ \Rightarrow 2\beta_1 &\leq \beta_1 + \beta_2 \text{lb} \frac{\beta}{\beta_2} \\ \Rightarrow 2\beta_1 &\leq \beta_1 \text{lb} \frac{\beta}{\beta_1} + \beta_2 \text{lb} \frac{\beta}{\beta_2} \\ \Rightarrow \beta_1 \text{lb} \beta_1 + \beta_2 \text{lb} \beta_2 + 2\beta_1 &\leq \beta \text{lb} \beta \end{aligned}$$

再由式(1)可得

$$I(\beta) \leq \beta \text{lb} \beta$$

证毕。

引理 8 对于扩展立方体网络 AQ_n , 设 U_1 为其中最大的非故障组件, 如果 U_1 的基数不小于任一个故障组件的基数且 AQ_n 是 (t, k) -可诊断的, 则

$$t \leq \frac{2^n [(2n-1)|U_1| - I(|U_1|)] + 2|U_1|^2 - 2|U_1| - 1}{2(2n-1)|U_1| - I(|U_1|)}$$

证明 设 $F = \bigcup_{i=1}^q F_i$ 表示 AQ_n 中所有的故障节点

的集合, $U = V - F = \bigcup_{i=1}^p U_i$ 表示 AQ_n 中所有非故障节点组成的集合。对子集 $X \subseteq V$, 记 $O(X) = \{(v_1, v_2) | v_1, v_2 \in X, (v_1, v_2) \in E\}$ 。因此

$$|O(U)| = \sum_{i=1}^p |O(U_i)|, |O(F)| = \sum_{j=1}^q |O(F_j)|$$

此外

$$|O(U)| \geq |O(U_1)| \geq 2(|U_1| - 1) = 2|U_1| - 2$$

由引理 7 及 $I(\beta)$ 的定义可知 $I(\beta)$ 为凸函数, 因而 $\frac{I(\beta) - I(0)}{\beta - 0} \leq I'(\beta)$, 即 $\beta I'(\beta) - I(\beta) \geq 0$ 。令 $H(x) =$

$$\frac{I(x)}{x}, \text{ 对 } H(x) \text{ 求导, } H'(x) = \frac{xI'(x) - I(x)}{x^2} \geq 0,$$

因此, $H(x) = \frac{I(x)}{x}$ 为单调递增函数。当 $\alpha \leq \beta$ 时,

$\frac{I(\alpha)}{\alpha} \leq \frac{I(\beta)}{\beta}$ 。注意到 $|U_1| \geq |F_i|, 1 \leq i \leq q$, 所以有

$$I(|F_i|) \leq \frac{I(|U_1|)}{|U_1|} |F_i|, 1 \leq i \leq q$$

又 $|O(U_1)| \leq I(|U_1|)$, 因此有

$$|O(F)| = \sum_{j=1}^q |O(F_j)| \leq \sum_{j=1}^q I(|F_j|) \leq \frac{I(|U_1|)}{|U_1|} \sum_{j=1}^q |F_j|$$

由于扩展立方体网络是 $(2n-1)$ -正则图, 且非故障节点到故障节点的边数, 与故障节点到非故障节点的边数相等, 所以

$$(2n-1)|F| - |O(F)| = (2n-1)|U| - |O(U)| \Rightarrow$$

$$(2n-1)|F| - \frac{I(|U_1|)}{|U_1|} \sum_{j=1}^q |F_j| \leq (2n-1)|U| - (2|U_1| - 2)$$

对上述不等式进行化简, 得

$$[(2n-1)|U_1| - I(|U_1|)]|V| + 2|U_1|^2 - 2|U_1| \leq |U| [2(2n-1)|U_1| - I(U_1)]$$

其中, $\sum_{j=1}^q |F_j| = |F| = |V| - |U|$ 。根据引理 7 可得

$I(U_1) \leq |U_1| \text{lb}|U_1|$, 此外, $\text{lb}|U_1| \leq n < 2(2n-1)$, 进而可得 $2(2n-1)|U_1| - I(U_1) > 0$, 因此

$$|U| \geq \frac{2^n((2n-1)|U_1| - I(U_1)) + 2|U_1|^2 - 2|U_1|}{2(2n-1)|U_1| - I(U_1)}$$

为了保证 AQ_n 是 (t, k) -可诊断的, t 必须满足

$$t \leq \frac{2^n[(2n-1)|U_1| - I(U_1)] + 2|U_1|^2 - 2|U_1| - 1}{2(2n-1)|U_1| - I(U_1)} - 1$$

证毕。

假设系统 $AQ_n = (V, E)$ 中的最大非故障组件是可识别的, 那么根据识别到的最大非故障组件便可求得系统在 (t, k) -可诊断算法下的最大 t 值。需要说明的是, $|U_1|$ 具有不确定性, 这是由于故障的节点不同的分布而造成的。下面考虑另一种确定 (t, k) -诊断度的方法。

引理 9 在扩展立方体网络 $AQ_n = (V, E)$ 中,

$$\Psi(t+1) = \left\lfloor \frac{2^n(2n-1 - \text{lb}t)}{2(2n-1) - \text{lb}t} + 1 \right\rfloor.$$

证明 设故障节点集为 F , $U = V - F = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ 为非故障组件集。因为扩展超立方网络的连通度为 $2n-1$, 所以故障组件内的边数应满足 $I(|F|) \leq (2n-1)|F|$ 。此外, 非故障节点集 U 到故障节点集 F 的边数应等于故障节点集 F 到非故障节点集 U 的边数, 即

$$\begin{aligned} |E(F, U)| &= |E(U, F)| = \frac{1}{2} [(2n-1)|F| - I(|F|)] \\ &= \frac{1}{2} [(2n-1)|U| - I(|U|)] \end{aligned}$$

其中, $E(F, U)$ 表示故障节点集 F 到非故障节点集 U 的边集, $E(U, F)$ 表示非故障节点集 U 到故障节点集 F 的边集。

根据扩展立方体的节点个数与连接边的关系, 易知系统总连接边数为非故障组件的边数、故障组件的边数、故障节点与非故障节点之间的边数之和, 即

$$\begin{aligned} a(E(G)) &= I(|U|) + I(|F|) + 2|E(U, F)| \\ &= I(U) + (2n-1)|F| \end{aligned}$$

根据扩展立方体的性质可得系统总边数 $a(E(G)) = 2^n(2n-1)$, 且 $I(|F|) \geq 0$ 。为了确定 $\Psi(t)$ 的值, 即满足以下条件的最小整数 q : 对于任何满足 $|H| = q$ 的子集 $H \subseteq V$, $V - H$ 中不存在基数大于或等于 t 的组件 $W \subseteq V - H$ 。为此, 令 $|U_i| < t, 1 \leq i \leq k$, 进而得

$$\begin{aligned} I(|U|) &= \sum_{i=1}^k I(|U_i|) \leq \sum_{i=1}^k (|U_i| \text{lb}|U_i|) \\ &\leq \sum_{i=1}^k |U_i| \text{lb}t = (2^n - |F|) \text{lb}t \end{aligned}$$

根据系统边数的等式关系有

$$2^n(2n-1) = I(|U|) + 2(2n-1)|F| - I(|F|) < (2^n - |F|)lbt + 2(2n-1)|F|$$

对上述不等式进行移项化简, 得

$$2^n(2n-1) - 2^n lbt < 2(2n-1)|F| - |F|lbt$$

最后化简, 得

$$|F| > \frac{2^n(2n-1-lbt)}{2(2n-1)-lbt}$$

由 $\Psi(t)$ 的定义有

$$\Psi(t+1) = \left\lfloor \frac{2^n((2n-1)-lbt)}{2(2n-1)-lbt} + 1 \right\rfloor$$

引理 10 对于任意的 $t \leq T = \min\{a, 2^b\}$, 如果函数 $f(t) \leq 0$, 则有 $(t-a)(lbt-b) \geq f(t)$ 。

证明 由于 $t \leq T = \min\{a, 2^b\}$, 所以有 $(t-a)(lbt-b) \geq 0$, 同时, 由于 $f(t) \leq 0$, 因此, 对于任意的 $t \leq T = \min\{a, 2^b\}$, 必有 $(t-a)lbt-b \geq f(t)$ 成立。

引理 11 当 $t \leq \frac{2^{n-1}(2n-2)lb(2n-3)}{(2n-3)^2}$ 时, $\Phi(t+1, k) \geq t$ 。

证明 对于一个正数 p 和一个整数 q , 若 $\lfloor p \rfloor \geq q$, 则 $p \geq q$ 。根据引理 9, 有

$$\begin{aligned} \Phi(t+1, k) &= \Psi(t+1) - 1 \\ &= \left\lfloor \frac{2^n(2n-1-lbt)}{2(2n-1)-lbt} + 1 \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{2^n(2n-1-lbt)}{2(2n-1)-lbt} \right\rfloor \end{aligned}$$

为了证明当 $t \leq \frac{2^{n-1}(2n-2)lb(2n-3)}{(2n-3)^2}$ 时, $\Phi(t+1, k) \geq t$, 只需证明

$$\frac{2^n(2n-1-lbt)}{2(2n-1)-lbt} \geq t$$

即

$$2^n(2n-1-lbt) - t(2(2n-1)-lbt) \geq 0 \quad (2)$$

式(2)等价于

$$\begin{aligned} &(t-2^n)(lbt - [(2n-1) + lb(lb(2n-3)) - lb(2n-3) - lb\frac{2n-3}{2n-2} - n]) \\ &\geq t(2n-1) - (t-2^n)((lb(lb(2n-3)) - lb(2n-3) - lb\frac{2n-3}{2n-2} - n)) \end{aligned} \quad (3)$$

为了证明式(3)当 $t \leq \frac{2^{n-1}(2n-2)lb(2n-3)}{(2n-3)^2}$ 时成立, 考虑以下的函数

$$f(t) = t(2n-1) - (t-2^n)(lb(lb(2n-3)) -$$

$$lb(2n-3) - lb\frac{2n-3}{2n-2} - n)$$

当 $t \leq \frac{2^{n-1}(2n-2)lb(2n-3)}{(2n-3)^2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} f(t) &= [(2n-1) - lb(lb(2n-3)) + lb(2n-3) + lb\frac{2n-3}{2n-2} + n]t + 2^n(lb(lb(2n-3)) - lb(2n-3) - lb\frac{2n-3}{2n-2} - n) \\ &\leq \left[\frac{2^{n-1}(2n-4)lb(2n-3)}{(2n-3)^2} \right] [3n + lb(2n-3) - lb(lb(2n-3))] + 2^n[lb(lb(2n-3)) - lb(2n-3) - (n-1)] \\ &< \left[\frac{2^{n-1}lb(2n-3)}{2n-3} \right] [3n + lb(2n-3) - lb(lb(2n-3))] + 2^n[lb(lb(2n-3)) - lb(2n-3) - (n-1)] \\ &= n2^{n-1} \left(\frac{3lb(2n-3)}{2n-3} - \frac{2n-2}{n} \right) + 2^{n-1} \left(\frac{lb(2n-3)}{2n-3} - 2 \right) \cdot [lb(2n-3) - lb(lb(2n-3))] \end{aligned}$$

$$\text{当 } x \geq 2 \text{ 时, } x > lbx, \left(\frac{3lb(2x-3)}{2x-3} - \frac{2x-2}{x} \right) < 0。$$

所以, 当 $n \geq 2$ 时, $2n-3 > lb(2n-3)$, 进而有

$$lb(2n-3) > lb(lb(2n-3))$$

从而有, 当 $t \leq \frac{2^{n-1}(2n-2)lb(2n-3)}{(2n-3)^2}$ 时, $f(t) < 0$ 。

此外, 令 $b = [(2n-1) + lb(lb(2n-3)) - lb(2n-3) - lb\frac{2n-3}{2n-2} - n]$ 。

$$\text{则 } 2^b = \frac{2^{(n-1)}(2n-2)lb(2n-3)}{(2n-3)^2}$$

另一方面, 有

$$\frac{2^{(n-1)}(2n-2)lb(2n-3)}{(2n-3)^2} \leq \frac{2^n(n-1)}{2n-3} < 2^n$$

因此, 当 $t \leq \frac{2^{n-1}(2n-2)lb(2n-3)}{(2n-3)^2}$ 时, 式(3)恒成立。

从而得到式(2)成立, 由以上分析可得 $\Phi(t+1, k) \geq t$ 。

证毕。

定理 1 扩展立方体网络 AQ_n 是 $\left(\frac{2^{n-1}(2n-2)\text{lb}(2n-3)}{(2n-3)^2}, 2n-1\right)$ -可诊断的。

证明 由扩展立方体网络 AQ_n 的性质可知，其连通度为 $\kappa(G) = 2n - 1$ ，如果把它选为 (t, k) -诊断算法中的合适 k 值，那么利用引理 11，可获得满足 $\Phi(t + 1, k(G)) \geq t$ 的合适 t 值为 $\frac{2^{n-1}(2n-2)\text{lb}(2n-3)}{(2n-3)^2}$ ，也就是说， AQ_n 是 $\left(\frac{2^{n-1}(2n-2)\text{lb}(2n-3)}{(2n-3)^2}, 2n-1\right)$ -可诊断的。

5 诊断度比较

网络系统在某诊断策略下的诊断度是指该系统在所考虑的诊断策略下能保证辨识的最大故障节点数。因此，网络系统的诊断度越大，说明可诊断的故障节点数就越大。根据一步诊断定义可知扩展立方体网络的传统诊断度为 $2n - 1$ ，而文献[22]证明了扩展立方体网络的条件诊断度为 $6n - 17 (n \geq 6)$ 。下面将本文算法下求得的扩展立方体网络的 (t, k) -诊断度与其条件诊断度、传统诊断度进行比较。

3 种常见诊断策略下的故障诊断度比较结果如图 5 所示。由图 5 可知，在扩展立方体网络的维度大于 7 的时候，其 (t, k) -诊断度优于其条件诊断度 $6n - 17$ 以及传统诊断度 $2n - 1$ ，并随着维数的增大，这种优势更明显。

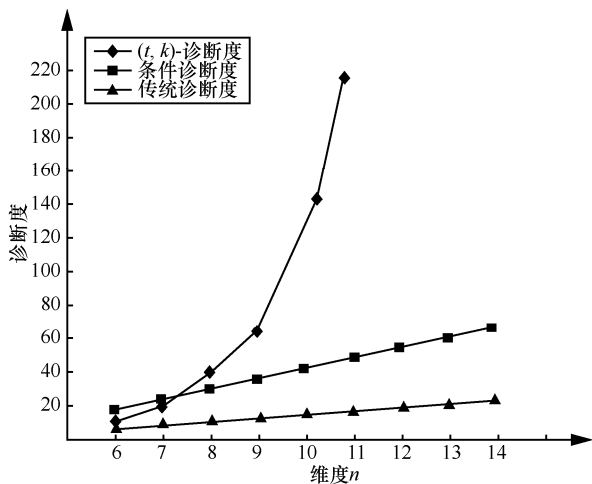


图 5 扩展立方体在 3 种诊断策略下诊断度

为了显示扩展立方体网络的优越性，对扩展立方体与超立方体的 (t, k) -诊断度进行对比，结果如表 2 所示。

表 2 AQ_n 与 Q_n 的 (t, k) -诊断度对比

维度 n	AQ_n	Q_n
5	5	4
6	13	9
7	23	18
8	44	36
9	77	70
10	145	136

表 3 给出多种网络结构的 (t, k) -诊断度。

表 3 各种网络的 (t, k) 诊断度

多处理器系统	(t, k) -诊断度
超立方网络, $n \geq 3$	$t = \frac{2^{n-1}(n-2)\text{lb}n}{n^2}, k = n$
交叉超立方, $n \geq 3$	
扭立方体, $n \geq 3$	
局部扭立方体, $n \geq 3$	
多重扭立方体, $n \geq 3$	
广义扭立方体, $n \geq 3$	
星图, $n \geq 4$	$t = \frac{2^{n-2}(n-3)}{n-1}, k = n-1$
Bubble-sort 图, $n \geq 4$	
Pancake 图, $n \geq 4$	
扩展立方体, $n \geq 3$	$t = \frac{2^{n-1}(2n-2)\text{lb}(2n-3)}{(2n-3)^2}, k = 2n-1$

6 结束语

当一个网络系统故障节点数不超过其上限 t 时，尽管一步诊断 (t -可诊断) 系统能根据测试症状准确地诊断出所有的故障节点，但这样的系统对于故障节点数超过其上限 t 就无能为力了。因此，设计网络系统时应尽可能使系统具有较高的诊断度。由于 (t, k) -诊断是每次诊断后，修复或更换其中的 k 个故障节点，自然会使得在下轮诊断更易于进行，为此， (t, k) -诊断也被称为分散难度的诊断方法。本文在前人的基础上，对扩展立方体网络的 (t, k) -诊断度进行研究，提出并证明了扩展立方体网络是 $\left(\frac{2^{n-1}(2n-2)\text{lb}(2n-3)}{(2n-3)^2}, 2n-1\right)$ -可诊断的。本文还得出，对于扩展立方体网络的 (t, k) -故障诊断而言，取得适当的 t 值与 k 值有关，一般地，当 k 值越小，其 (t, k) -诊断度中的 t 值会越大。但 k 值越小，就意味着需要诊断迭代的次数越大，从而导致算法的复杂性增大。如何寻找 t 与 k 值之间的合适取值，是下一步值得研究的问题。

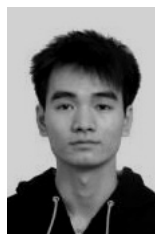
参考文献:

- [1] FRIEDMAN A D, SIMONCINI L. System-level fault diagnosis[J]. Computer, 1980, 13(3): 47-53.
- [2] PREPARATA F P, METZE G, CHIEN R T. On the connection assignment problem of diagnosable system[J]. IEEE Transaction on Computers, 1967, 16(12): 848-854.
- [3] YE L C, LIANG J R. Five-round adaptive diagnosis in Hamiltonian networks[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2015, 26(9): 2459-2464.
- [4] YANG X, TANG Y. A $(4n-9)/3$ diagnosis algorithm for hypercube networks[J]. Information Sciences, 2007, 177 (8): 1771-1781.
- [5] CHANG G Y, CHANG G J, CHEN G H. Diagnosabilities of regular networks[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2005, 16 (4): 314-323.
- [6] FAN J. Diagnosability of the Möbius cubes[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1998, 9(9): 923-928.
- [7] HSIEH S Y, CHUANG T Y. The strong diagnosability of regular networks and product networks under the PMC model[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2009, 20(3): 367-378.
- [8] KAVIANPOUR A, KIM K H. Diagnosability of hypercubes under the pessimistic one step diagnosis strategy[J]. IEEE Transactions on Computers, 1991, 40 (2): 232-237.
- [9] BARSÌ F, GRANDONI F, MAESTRINI P. A theory of diagnosability of digital systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 1976, 25(6): 585-593.
- [10] SENGUPTA A, DAHBURA A T. On self-diagnosable multiprocessor systems: diagnosis by the comparison approach[J]. IEEE Transactions on Computers, 1992, 41(11): 1386-1396.
- [11] LEE C W, HSIEH S Y. Diagnosability of two-matching composition networks under the model[J]. IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing, 2011, 8(2): 246-255.
- [12] SENGUPTA A, DAHBURA A. On self-diagnosable multiprocessor systems: diagnosis by the comparison approach[J]. IEEE Transactions on Computers, 1992, 41(11): 1386-1396.
- [13] CHANG G Y, CHANG G J, CHEN G H. Diagnosability of regular networks[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2005, 16(4): 314-323.
- [14] HSIEH S Y, CHEN Y S. Strongly diagnosable systems under the comparison diagnosis model[J]. IEEE Transactions on Computers, 2008, 57(12): 1720-1725.
- [15] HSIEH S Y, CHEN Y S. Strongly diagnosable product networks under the comparison diagnosis model[J]. IEEE Transactions on Computers, 2008, 57(6): 721-732.
- [16] YE L C, LIANG J R, LIN H X. A fast pessimistic diagnosis algorithm for hypercube-like networks under the comparison model[J]. IEEE Transactions on Computers, 2016, 65(9): 2884-2888.
- [17] SAAD Y, SCHULTZ M H. Topological properties of hypercube[J]. IEEE Transactions on Computers, 1988, 37(7): 867-872.
- [18] LEE S C, HOOK L R. Logic and computer design in nanospace[J]. IEEE Transactions on Computers, 2008, 57(7): 965-977.
- [19] CHOUDUM S A, SUNITHA V. Augmented cubes[J]. Networks, 2002, 40(2): 71-84.
- [20] CHANG N W, HSIEH S Y. Conditional diagnosability of augmented cubes under the PMC model[J]. IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing, 2012, 9(1): 46-60.
- [21] HONG W S, HSIEH S Y. Strong diagnosability and conditional diagnosability of augmented cubes under the comparison diagnosis model[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2012, 61(1):140-148.
- [22] ARAKI T, SHIBATA Y. (t, k) -diagnosable system: a generalization of the PMC models[J]. IEEE Transactions on Computers, 2003, 52(7): 971-975.
- [23] CHEN C A, HSIEH S Y. (t, k) -diagnosis for component-composition graphs under the MM* model[J]. IEEE Transactions on Computers, 2011, 60(12): 1704-1717.
- [24] 熊茜, 梁家荣, 马强. 交换超立方网络的 (t,k) 故障诊断度研究[J]. 通信学报, 2016, 37(3): 190-198.
- XIONG X, LIANG J R, MA Q. Research on (t,k) -diagnosability for exchanged hypercube network[J]. Journal on Communications, 2016, 37 (3): 190-198.
- [25] HSIEH S Y, CHEN C A. Computing the (t,k) -diagnosability of component-composition graphs and its application[C]//The Series on Lecture Notes in Computer Science, 2010, 6507: 363-374.

作者简介:



梁家荣 (1966-), 男, 广西玉林人, 博士, 广西大学教授, 主要研究方向为网络的故障诊断、并行与网络计算。



陈秒江 (1992-), 男, 广西北流人, 广西大学硕士生, 主要研究方向为网络的故障诊断、并行与网络计算。